Das Federpendel

1. Das Weg-Zeit Diagramm (y-t Diagramm)

Hängt eine Masse m an einer Feder und kann dabei eine periodische Bewegung ausführen, so spricht man von einem Federpendel. Wenn die Feder frei hängend montiert ist, macht die Masse eine periodische Auf- und Ab-Bewegung, sie bewegt sich also übertragen in ein x-y Koordinatensystem auf der Y-Achse auf und ab. Im Idealfall, wenn keine Reibung vorhanden ist, wird sich die Masse, einmal angestossen, unendlich lange mit einer bestimmten Frequenz f und der Periodendauer T auf und ab bewegen:

Periodendauer T: Einheit [s] $\boxed{T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}}$

Frequenz f: Einheit [s^{-1}] $\boxed{f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{D}{m}}}$

D ist die Federkonstante in der Einheit [N/m], m ist die Masse in [kg].

Da bei einer Feder die Rückstellkraft proportional zur Auslenkung ist (also bei doppelter Auslenkung doppelte Kraft, bei halber Auslenkung halbe Kraft usw.), spricht man von einer **Harmonischen Schwingung**, welche sich durch eine Sinusfunktion darstellen lässt:

$$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c)$$

Anstelle von x wird bei einer **Schwingung die Zeit t** verwendet. Weiter entspricht a der Auslenkung der Masse aus der Neutrallage und man verwendet hier y, da die Masse der y-Achse entlang schwingt. Genau genommen ist a die **maximal mögliche Auslenkung: $a = y_0$** (Einheit [m]).
Da der Sinus nur von einem Winkel genommen werden kann, muss also in der Klammer ein Winkel stehen. Weil x durch t ersetzt wird, steht mit t eine Grösser der Zeit in der Klammer und kein Winkel! Darum muss b eine Grösse sein, die die Einheit rad/s (oder rad$\cdot s^{-1}$) hat. Multipliziert man jetzt t mit b, so ergibt sich die Einheit [rad], was dann bestens passt, um den Sinus zu berechnen. Die Grösse **b entspricht der Winkelgeschwindigkeit ω** (Einheit [rad/s]). Wir haben diese Grösse schon bei der Kreisbewegung angetroffen (siehe S. 109 im Skript). Auch den Zusammenhang zwischen der Periodendauer T und ω kennen wir bereits: $\omega = 2 \cdot \pi / T$ [rad/s].
Dann bleibt noch c. Auch c muss ein Winkel sein, sonst kann weder die Addition in der Klammer noch ein Winkel berechnet werden. Tatsächlich handelt es sich bei c um den Startwinkel, wenn man die Schwingung nicht im Nullpunkt starten lassen will, sondern etwas früher oder später. Dieser Startwinkel **c wird bei Schwingungen mit φ_0, der Phasenverschiebung**, bezeichnet und in der Einheit [rad] angegeben. Zusammengefasst sieht nun die harmonische Schwingungsfunktion wie folgt aus:

$$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) \quad \rightarrow \quad y(t) = y_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) \quad \text{Einheit: [m]}$$

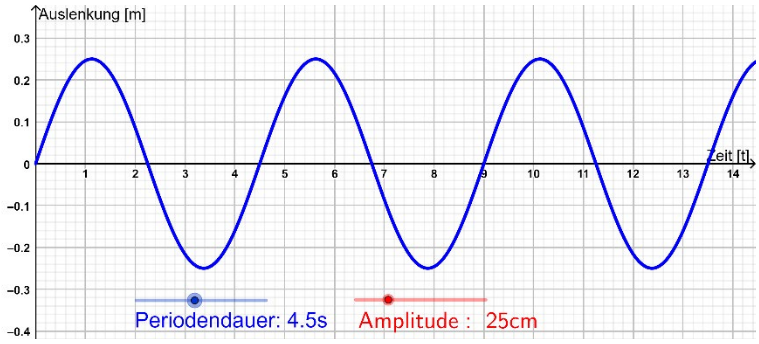
Um diese Funktion zeichnen zu können brauchen wir also y_0, ω und φ_0. Die Zeit **t** ist die veränderliche Grösse und die Funktion y(t) zeigt auf, welche Auslenkung aus der Neutrallage die Masse m zum Zeitpunkt t hat. Die Winkelgeschwindigkeit ω kann aus der Periode T berechnet werden und y_0, die maximale Auslenkung muss aus der Aufgabenstellung ersichtlich sein oder berechnet werden können.

Ein Federpendel besteht aus einer Masse m = 1 kg und einer Federkonstanten D = 1.95 N/m. Zu Beginn befindet sich die Masse in der Gleichgewichtslage und wird nun nach oben so angestossen, dass sie einen Weg von 0.5 m von Umkehrpunkt zu Umkehrpunkt zurücklegt. Wie gross sind y_0, **T**, ω, φ_0 und wie sehen die 3 Diagramme (y-t, v-t und a-t) aus? Wir nehmen einfachheitshalber an, dass $\varphi_0 = 0$ ist.

y_0 =	T =	ω =	φ_0 = 0

Damit lässt sich das nebenstehende Weg-Zeit (y-t)-Diagramm zeichnen:

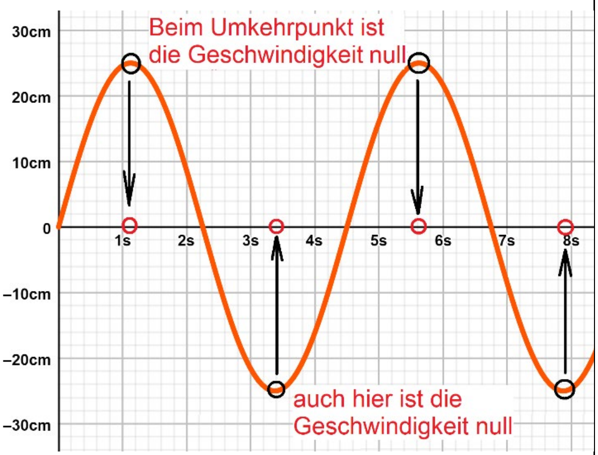
y(t) = 0.25 * sin(1.3964 * t) [m]



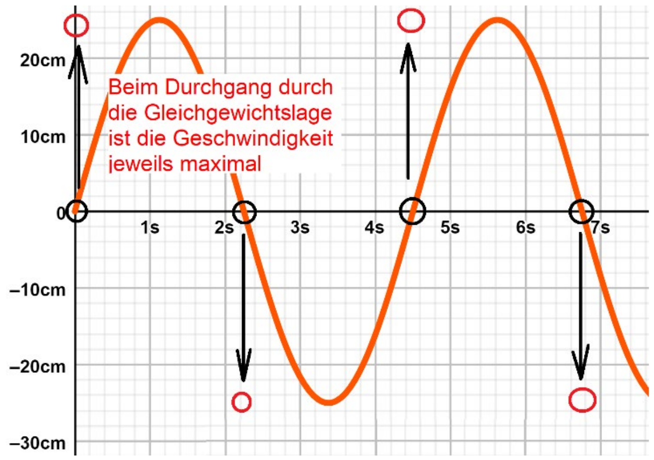
2. Das Geschwindigkeits-Zeit Diagramm (v-t Diagramm)

Beobachtet man diese Auf- und Ab-Bewegung, so stellt man fest, dass die Masse an den Punkten ganz oben und unten jeweils kurz stehen bleibt, die Richtung ändert und dann nach unten oder oben beschleunigt. Nach kurzer Zeit erfolgt ein erneutes Abbremsen bis zum Stillstand und die Bewegung beginnt von vorne. Das heisst die Geschwindigkeit ändert ständig. Sie kann ebenfalls durch eine trigonometrische Funktion beschrieben werden. Ob es sich um die Sinus- oder die Cosinus-Funktion handelt, kann z.B. mit folgenden Überlegungen abgeleitet werden:

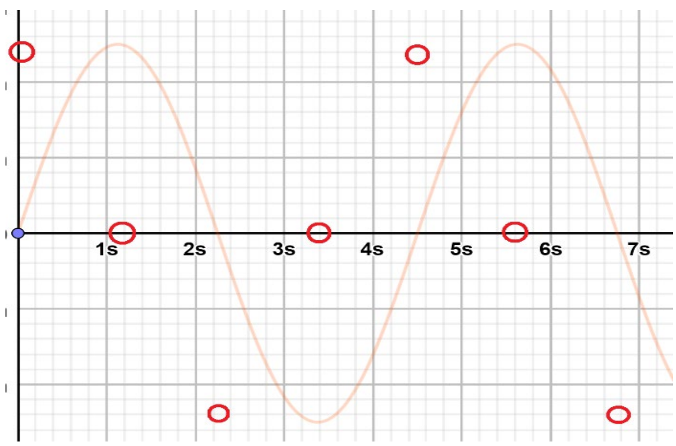
1) Bei den Umkehrpunkten, da wo die Masse m die Richtung dreht, ist die Geschwindigkeit v = 0 m/s. Das heisst im V-t Diagramm muss die gesuchte Funktion bei diesen Punkten die X-Achse schneiden.



2) Die höchste Geschwindigkeit V_{max} wird jeweils dann erreicht, wenn die schwingende Masse durch die Gleichgewichtslage fliegt. Die Gleichgewichts-lage befindet sich da, wo beim y-t Diagramm die Nullstellen liegen.



3) Betrachtet man jetzt nur die neuen roten Punkte, dann sieht die Graphik wie nebenstehend gezeigt aus. Es ist unschwer erkennbar, dass wenn man die roten Punkte richtig verbindet, eine neue Trigonometrische Funktion entsteht. Diese startet zum Zeitpunkt t = 0 auf dem Maximum, geht nach einem Viertel der Periodendauer (T/4) durch den Nullpunkt und erreicht bei T/2 das Minimum um anschliessend bei ¾*T die x-Achse zu schneiden und bei T wieder auf das Maximum zu kommen. Welche trigonometrische Funktion hat ein solches Verhalten?



f(0) = 1   f(T/4) = 0   f(T/2) = -1   f(3T/4) = 0   f(T) = 1

Um welche trigonometrische Funktion handelt sich: **sin(x), cos(x), -sin(x) oder -cos(x)?**

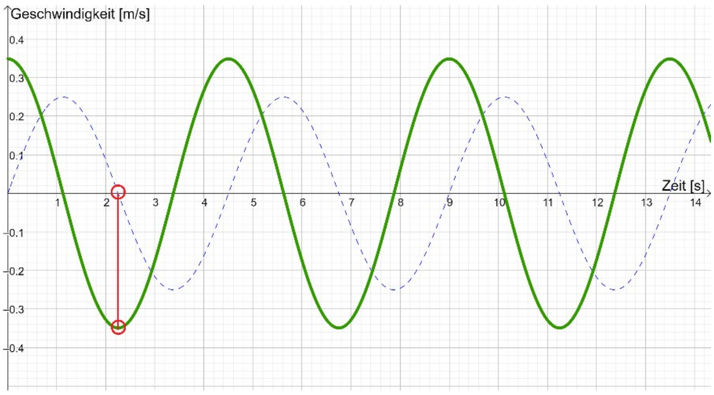
Die Funktionswerte sind nicht mehr die gleichen, wie bei der Weg-Zeit Funktion, wo jeweils die Auslenkung aus der Neutrallage berechnet wurde. Jetzt geht es um die Geschwindigkeit, folglich soll die Funktion für einen beliebigen Zeitpunkt Geschwindigkeitswerte liefern. Die Trigonometrische Funktion selbst erzeugt nur Zahlenwerte zwischen -1 und 1. Multipliziert man diese Werte mit der maximal möglichen Geschwindigkeit V_0, so werden die Funktionswerte nun zwischen $-V_0$ und V_0 hin und her pendeln. Wobei $-V_0$ die höchstmögliche Geschwindigkeit nach unten und V_0 die höchstmögliche Geschwindigkeit nach oben bedeuten. Dazwischen wird in regelmässigen Zeitabständen die Geschwindigkeit 0 m/s durchlaufen. Somit stellt sich die Frage nach der maximalen Geschwindigkeit V_0. Es handelt sich dabei um die Bahngeschwindigkeit, die wir auch bereits aus der Rotation kennen. Anstelle des Radius wird hier aber die maximale Auslenkung in y-Richtung also y_0 verwendet:
(Wenn Sie gerne noch mehr zur Geschwindigkeit wissen möchten, beachten Sie die Links auf Seite 4.)

$V_0 = y_0 * \omega$ und somit: $\mathbf{v(t) = y_0 * \omega * \cos(\omega * t)}$

Mit den Zahlenwerten von unserem Beispiel ergibt sich also folgendes v-t-Diagramm:

$\mathbf{V(t) = 0.349 * \cos(1.3964 * t)}$ [m/s]

Gestrichelt dargestellt ist auch noch die Auslenkung y(t). So sieht man z.B. bei t = T/2 = 2.2 s, wie die Masse m durch die Neutrallage rast mit einer Geschwindigkeit von -0.35 m/s, d.h. die Masse bewegt sich mit maximaler Geschwindigkeit nach unten.



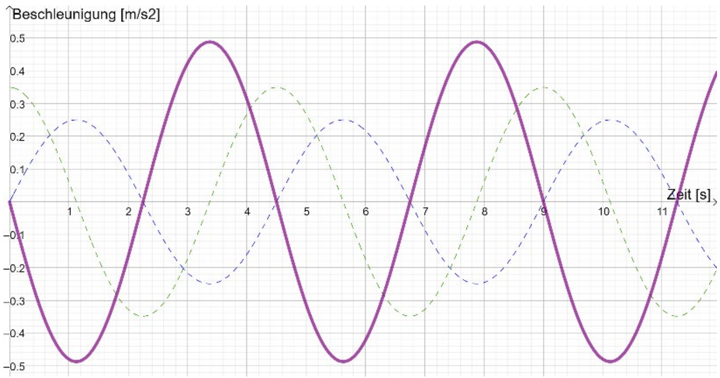
3. Das Beschleunigungs-Zeit Diagramm (a-t Diagramm)

Mit dem gleichen Vorgehen bzw. ähnlichen Überlegungen, wie für die Geschwindigkeit, kann man auch die Beschleunigungsfunktion ableiten. Schlussendlich landet man bei der Frage nach der Grösse der maximalen Beschleunigung a_0. Dazu gibt es mehrere Möglichkeiten, auf die hier nicht weiter darauf eingegangen werden soll und wir verwenden den folgenden Ausdruck: $\mathbf{a_0 = y_0 * \omega^2}$.

Für die gegebenen Anfangsbedingungen ergibt sich die nebenstehende Graphik. Die Beschleunigungsfunktion ist bei einem Fadenpendel trigonometrisch gesehen die negative Funktion der Auslenkungsfunktion, hier also: -sin()

$\mathbf{a(t) = y_0 * \omega^2 * (-\sin(\omega * t))}$

$\mathbf{a(t) = -\,0.488 * \sin(1.3964 * t)}$ [m/s^2]

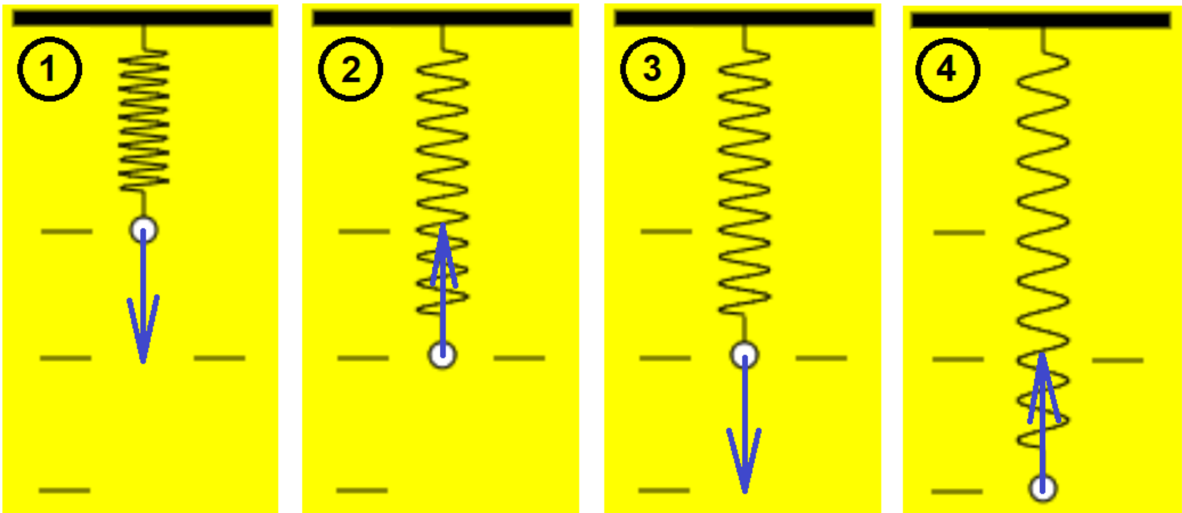


4. Die Anfangsbedingungen

Die Anfangsbedingungen definieren welchen Satz an trigonometrischen Funktionen die Schwingung korrekt beschreiben. Zu den Anfangsbedingungen gehören alle Bahnparameter, welche die Bewegung der Masse m zum Zeitpunkt t = 0 eindeutig festlegen. Dazu gehören z.B. der Ort (Auslenkung), wo sich die Masse befindet und die Bewegungsrichtung (nach oben oder nach unten). Weitere Möglichkeiten sind die Geschwindigkeit und die Beschleunigung respektive die Kraft. Es müssen nicht immer alle Parameter vorgegeben sein, gewisse Bedingungen schliessen sich auch gegenseitig aus. Wenn die Masse z.B. im höchsten Punkt startet, ist es nicht möglich, dass die Masse noch eine Geschwindigkeit in Richtung nach oben erhalten soll, sondern die Geschwindigkeit hier muss 0 m/s sein und die künftige Bewegungsrichtung nach unten zeigen!

In der folgenden Tabelle sind für die 4 einfachsten Anfangsbedingungen die daraus ableitbaren trigonometrischen Funktionen für das y-t-, v-t- und a-t Diagramm aufgelistet:

	Startort	Richtung der Bewegung	y(t)	v(t)	a(t)
1	Höchster Punkt (maximale positive Auslenkung)	nach unten	**cos()**	**-sin()**	**-cos()**
2	Neutrallage (keine Auslenkung)	nach oben	**sin()**	**cos()**	**-sin()**
3	Neutrallage	nach unten	**-sin()**	**-cos()**	**sin()**
4	Tiefster Punkt (maximale negative Auslenkung)	nach oben	**-cos()**	**sin()**	**cos()**



Sicher haben Sie bemerkt, dass die Abfolge der trigonometrischen Funktionen einer gewissen Logik folgt: sin() -> cos() -> -sin() -> -cos() und dann wieder sin() und so weiter. Dies ist nicht zufällig, sondern liegt in der höheren Mathematik begründet und hat mit der Ableitung einer Funktion zu tun. Die Ableitung einer Funktion ist eine neue Funktion, welche die Steigung der ursprünglichen Funktion an einer beliebigen Stelle berechnet. Bei der Sinusfunktion ist dies die Cosinusfunktion, welche die Steigung der Sinusfunktion berechnet.

5. Aufgabe zu den Bewegungsdiagrammen einer harmonischen Schwingung

5.1 Zeichnen Sie das y-t-, v-t-, und das a-t-Diagramm eines Federpendels mit einer Federkonstanten D = 6.17 N/m und einer Masse m = 10 kg. Die maximale Auslenkung $\hat{y}$ soll 6 cm betragen. Beim **Start** soll sich die **Masse auf dem höchsten Punkt** befinden.

y-t-Diagramm:

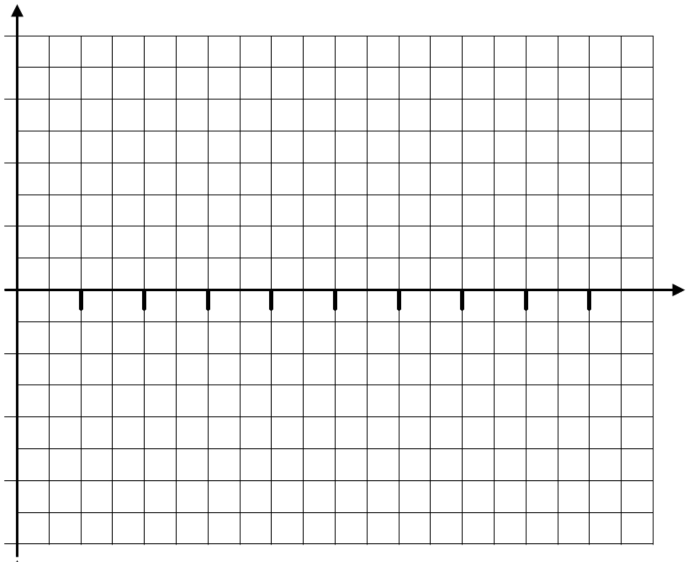
T =

f =

y_0 =

ω =

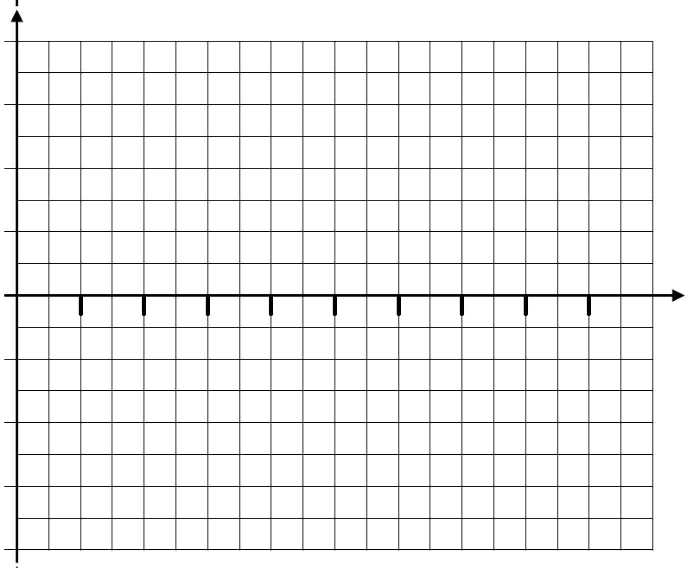
y(t) =



v-t-Diagramm:

v_0 =

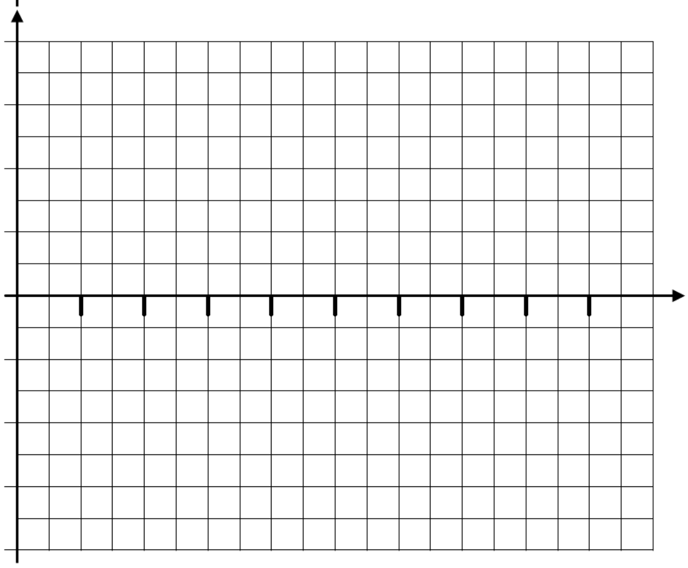
v(t) =



a-t-Diagramm:

a_0 =

a(t) =



Welche Werte ergeben sich bei t = 5 s? Stimmen Sie mit den Diagrammwerten überein?

5.2 Zeichnen Sie das y-t-, v-t-, und das a-t-Diagramm eines Federpendels mit einer Federkonstanten D = 6.17 N/m und einer Masse m = 10 kg. Die maximale Auslenkung $\hat{y}$ soll 6 cm betragen. Beim Start soll sich die **Masse in der Ruhelage** befinden und **nach oben** starten.

y-t-Diagramm:

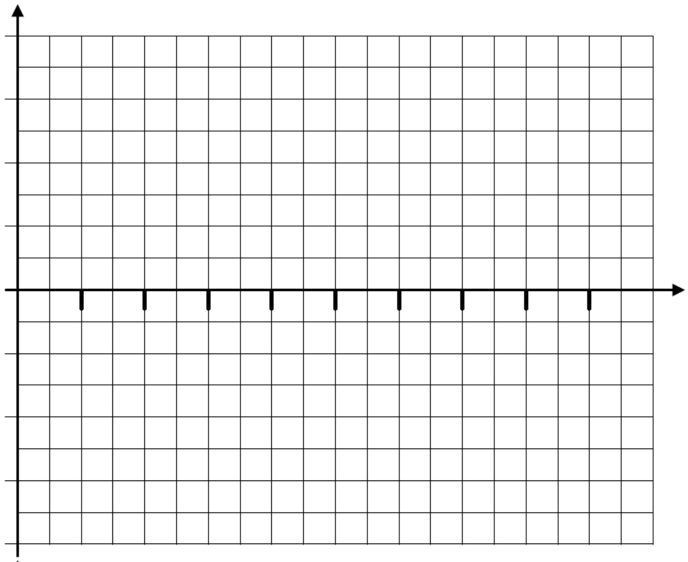
T =

f =

y_0 =

ω =

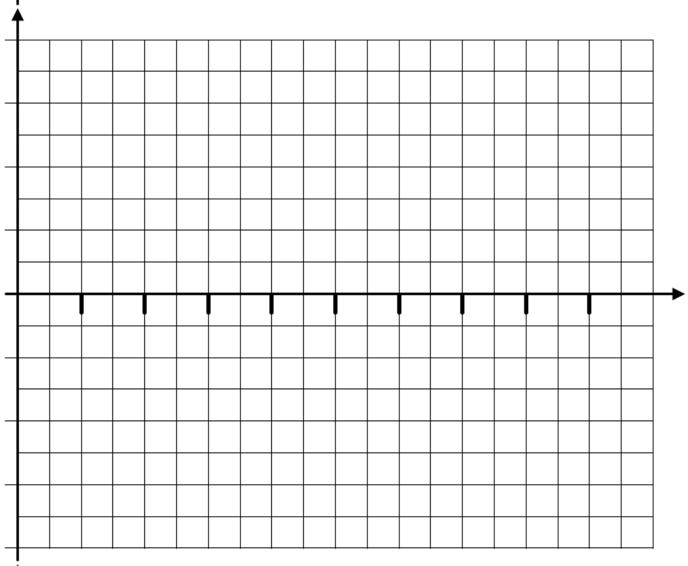
y(t) =



v-t-Diagramm:

v_0 =

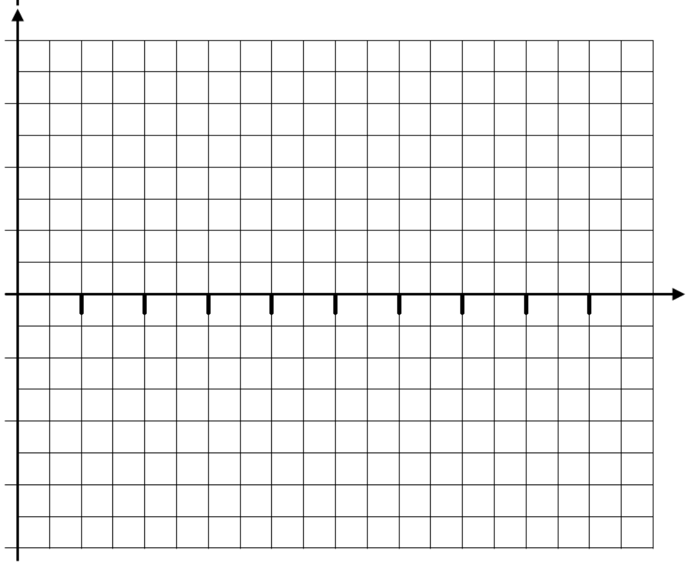
v(t) =



a-t-Diagramm:

a_0 =

a(t) =



Welche Werte ergeben sich bei t = 5 s? Stimmen Sie mit den Diagrammwerten überein?